

Željka Bjelanović Dijanić

pro. matematike i informatike, pro. mentor

Srednja škola Čazma, Livadarska 30, Čazma

Normala – udruga za promicanje nastave matematike, Zagreb

e-mail: [zeljka.bjelanovic@bj.t-com.hr](mailto:zeljka.bjelanovic@bj.t-com.hr)

## **Učenje matematike otkrivanjem uz pomoć programa dinamičke geometrije Geogebra – akcijsko istraživanje**

Aktivno uključivanje u proces stjecanja znanja jedan je od preduvjeta uspješnog savladavanja matematičkih sadržaja. Teorija konstruktivizma zalaže se da učenik samostalnom aktivnošću na temelju vlastitog iskustva dolazi do vlastitih spoznaja, dok nastavnik oblikuje okolinu za učenje te potiče i usmjerava učenike u njihovom samostalnom učenju. Cilj takvog pristupa je da se učenici s vremenom osamostale i nauče kako sami mogu učiti, a Pólyin model rješavanja problema (Pólya, 2004) nudi odgovor kako to izvesti u praksi – u 4 koraka: razumijevanje problema, stvaranje plana, izvođenje plana i osvrt na učinjeno.

U nastavnoj praksi to je moguće postići metodom učenja otkrivanjem ili istraživački usmjerenom nastavom, a u matematici od velike pomoći mogu biti programi dinamičke geometrije koji zbog dinamičnosti prikaza i interaktivnosti matematičkih objekata pružaju dinamičko virtualno okruženje za istraživanje. Među takvim programima izdvajam GeoGebru zbog toga što je besplatna i otvorenog koda, prevedena na hrvatski jezik, intuitivna i lako se savladava rad u programu, objedinjuje elemente geometrije, algebre, analize i statistike, te je zajednica njenih korisnika na internetu brojna i izuzetno aktivna tako da svakim danom ima sve više gotovih primjera koji se mogu koristiti u nastavi.

Zbog raznih problema na koje je autorica nailazila u svojoj nastavnoj praksi pokušavajući implementirati gore opisane ideje, odlučila se za akcijsko istraživanje kojim nastoji odgovoriti na problem: kako pomoći učenicima da samostalno usvajaju nove matematičke pojmove, koncepte i ideje učenjem otkrivanjem uz pomoć računala i programa GeoGebra. U ovom radu je opisan tijek istraživanja te prikazan izvještaj o ostvarenom akcijskom istraživanju s učenicima 2. razreda opće gimnazije u Srednjoj školi Čazma u Čazmi.

Ključne riječi:

akcijsko istraživanje, GeoGebra, Pólyin model rješavanja problema, konstruktivizam, učenje otkrivanjem, virtualno dinamično okruženje za učenje

## Uvod

Jedan od ciljeva poučavanja matematike jest naučiti učenike misliti te ih osposobiti za rješavanje problema i donošenje odluka u budućem životu. Kurnik (2008, str 53) naglašava da su "osnovne smjernice za osuvremenjivanje nastave pobuđivanje i pokretanje mišljenja učenika i nastojanje da dobar dio novih znanja stječu vlastitim snagama i sposobnostima". Za ovakav pristup zalaže se teorija konstruktivizma koja se zasniva na činjenici da znanje nastaje aktivnošću učenika pa je stoga uloga nastavnika kao izvora informacija znatno smanjena u odnosu na ulogu nastavnika koji će voditi i usmjeravati učenike na putu stjecanja novih znanja. Znanje se ne može prenositi od nastavnika prema učeniku na način da se informacije koje odašilje nastavnik "preslikaju" u glave učenika. Učenik se mora aktivno uključiti u nastavni proces te samostalnim radom doći do vlastitih spoznaja. Način učenja je jedinstven za svakog učenika jer (upravo i samo) on vlastitom aktivnošću "konstruira" svoje znanje na temelju vlastitog iskustva. A uloga nastavnika je da odabere prikladne oblike rada, nastavne metode, izvore znanja i na taj način oblikuje okolinu za učenje te da potiče i usmjerava učenike u samostalnom otkrivanju novih pojmova, koncepata i zakonitosti u sadržajima koje uče.

Nastavna strategija učenja otkrivanjem i istraživački usmjerena nastava su modeli nastave koji odgovaraju na gore postavljene zahtjeve (Bognar, Matijević, 2002). **Učenje otkrivanjem** (*discovery learning*) je iskustveno učenje koje se odvija u stvarnosti ili se koristi simulacija. U nastavi matematike sve više se koristi simulacija u programima dinamičke geometrije koji zbog dinamičnosti prikaza i interaktivnosti matematičkih objekata pružaju dinamičko virtualno okruženje za istraživanje. Među takvim programima izdvajam GeoGebra zbog toga što je besplatna i otvorenog koda, prevedena na hrvatski jezik, intuitivna i lako se savladava rad u programu, objedinjuje elemente geometrije, algebre, analize i statistike, te je zajednica njenih korisnika na internetu brojna i izuzetno aktivna tako da svakim danom ima sve više gotovih primjera koji se mogu koristiti u nastavi.

U **istraživački usmjerenoj nastavi** (*inquiry based learning*) učenike se potiče da samostalnim istraživanjem dolaze do određenih spoznaja uz odgovarajuću pomoć nastavnika. Ovakav način rada omogućuje visok stupanj diferencijacije nastave jer će nastavnik svakom učeniku pomoći onoliko koliko mu je potrebno. Učenik će samostalno otkriti smisao i važnost informacija što će ga dovesti do zaključka ili razmišljanja o novostečenom znanju. Cilj takvog pristupa je da se učenici s vremenom osamostale i nauče kako sami mogu učiti, a Pólyin model rješavanja problema nudi odgovor kako to izvesti u praksi – u 4 koraka:

1. **Razumijevanje zadatka** - zadatak treba pročitati s razumijevanjem te pokušati odgovoriti na pitanja: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet zadatka?*
2. **Stvaranje plana** - uočiti zakonitost (pravilo, formula, teorem) koja povezuje poznate i nepoznate varijable, složeniji zadatak raščlaniti na nekoliko lakših.
3. **Izvršavanje plana** - paziti da se točno izvede svaki korak.
4. **Osvrt** - provjera rezultata, odgovoriti na pitanja *Može li se rezultat dobiti na drugačiji način? Može li se rezultat uočiti na prvi pogled? Može li se rezultat ili metoda rješavanja upotrijebiti za neki drugi zadatak?* (Pólya, 2004).

O tome kako Pólyin model rješavanja problema ugraditi u GeoGebrino dinamično okruženje za učenje te istraživanje i eksperimentalan rad učenika više se može pročitati kod Bjelanović Dijanić (2010) te Karadag i McDougall (2009). U nastavku rada slijedi izvadak iz izvještaja akcijskog istraživanja koje je autorica provela sa svojim učenicima dok su učili prema prethodno opisanim idejama.

## Kontekst istraživanja

Sudionici akcijskog istraživanja su učenici 2.c razreda opće gimnazije u Srednjoj školi Čazma (ima ih 20 u razredu), a u ulozi istraživača i nastavnika sam ja - njihova nastavnica matematike i informatike Željka Bjelanović Dijanić. U dva razreda opće gimnazije predajem matematiku, a svim razredima u školi informatiku ili računalstvo te mi je informatička učionica uvijek na raspolaganju. U učionici imamo jedno glavno računalo (server) koje opslužuje 16 tankih klijenata, LCD projektor i platno te je pristup internetu moguć sa svih 16 radnih mjesta. Ponekad organiziram nastavu matematike da učenici samostalno ili u paru rade na interaktivnim digitalnim nastavnim materijalima.

Tijek akcijskog istraživanja pratila su i tri kritička prijatelja:

1. dr. sc. Branko Bognar – docent na Filozofskom fakultetu u Osijeku, bavi se temama vezanima uz akcijska istraživanja<sup>1</sup>, također mentor za metodološki aspekt istraživanja;
2. Šime Šuljić – profesor matematike na Gimnaziji i strukovnoj školi Jurja Dobrile u Pazinu, intenzivno se bavi primjenom računala u nastavi matematike, izrađuje interaktivne digitalne materijale, redovito prati razvoj kognitivnih alata u svijetu;<sup>2</sup>
3. Željko Kralj – ravnatelj Srednje škole Čazma i nastavnik matematike s 30-godišnjim iskustvom koji pokazuje veliki interes za promjene koje pokušavam uvesti u nastavi.

<sup>1</sup> Tema doktorske disertacije: *Mogućnost ostvarivanja uloge učitelja – akcijskog istraživača posredstvom elektroničkog učenja* (mentor prof. dr. sc. Ana Sekulić-Majurec, Filozofski fakultet u Zagrebu, 2008.)

<sup>2</sup> Šime Šuljić je jedan od prevoditelja GeoGebre na hrvatski jezik, autor nekoliko desetaka stručnih članaka te predavanja o korištenju računala u nastavi matematike.

## **Problem i plan istraživanja**

Odgojne vrijednosti od kojih u ovom istraživanju polazimo su **samostalnost** pri učenju, **aktivnost** svih učenika, **suradnja** učenika, **motivacija** za učenje matematike te **učenje uz pomoć računala**. Cjelovit izvještaj akcijskog istraživanja prelazi okvire rada pa će ovdje biti prikazan samo dio istraživanja vezan uz samostalnost i aktivnost u računalom potpomognutom učenju.

U tradicionalnoj nastavi u kojoj dominira aktivnost učitelja i frontalni oblik nastave gotovo sve navedene vrijednosti su narušene. Učenici se previše oslanjaju na nastavnika te veći dio njih nije u stanju kod kuće riješiti zadatak ako sličan nije riješen u razredu. Na satu su aktivni samo zainteresirani učenici dok ostali čekaju da prepisu s ploče. A računalo i internet su medij kojim su učenici svakodnevno okruženi pa se kao alternativa nudi učenje uz pomoć računala (*CAL – Computer Assisted Learning*). Međutim, neće računalo samo po sebi poboljšati trenutnu situaciju. I kod prijašnjih generacija učenika provodila sam nastavu učenjem otkrivanjem uz pomoć računala pa smo nailazili na poteškoće, a rezultati se nisu bitno poboljšali. Zbog toga sam odlučila uvesti promjene u svojoj pedagoškoj praksi te provesti akcijsko istraživanje u 2.c razredu. Svih 20 učenika izjasnilo se da žele sudjelovati, a njihovi roditelji potpisali su izjavu da se s time slažu. Očekujem da ćemo ustanoviti zbog čega učenici imaju poteškoća u samostalnom učenju otkrivanjem uz pomoć računala i programa GeoGebra na temelju sustavnog praćenja i kritičkog propitivanja te da ćemo zajednički prevladati poteškoće pri usvajanju matematičkih sadržaja novim oblicima i metodama rada.

Stoga smo problem ovog akcijskog istraživanja iskazali pitanjem:

**Kako pomoći učenicima da samostalno usvajaju nove matematičke pojmove, koncepte i ideje učenjem otkrivanjem uz pomoć računala i računalnog programa dinamičke geometrije GeoGebra?**

Potvrdu za ispravnost odluke da prethodno definirani problem istražim koristeći akcijsko istraživanje našla sam u knjizi “Metode istraživanja u obrazovanju” (Cohen, Manion i Morrison, 2007, str. 226) gdje se navodi da se akcijska istraživanja mogu koristiti za istraživanje metoda poučavanja – zamjena tradicionalne metode metodom otkrivanja te pri razvijanju novih metoda učenja. Prema podjeli Zuber-Skerritt (vidi Cohen i dr, 2007, str. 232) ovo istraživanje je emancipacijsko jer se sudionici (nastavnica i učenici) osjećaju odgovornima za rješavanje iskazanog problema kojeg će nastojati riješiti kroz ciklički proces: plan – akcija – promatranje – refleksija. Kako bi u tome bili što uspješniji planira se provođenje aktivnosti kroz tri ciklusa što je vidljivo u tablici 1.

Tablica 1. Plan istraživanja

<b>Ciljevi</b>		
<p>1. Osposobljavanje učenika za samostalno učenje metodom otkrivanja uz pomoć računalnog programa dinamičke geometrije GeoGebra.</p> <p>2. Izrada novih i prilagodba postojećih digitalnih materijala potrebama samostalnog učenja otkrivanjem uz pomoć računala.</p>		
<b>Kriteriji</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Učenici pokazuju veću samostalnost pri usvajanju novih nastavnih sadržaja.</li> <li>• Učenici samostalno dolaze do zaključaka.</li> <li>• Gotovo svi učenici su aktivni na satu.</li> <li>• Učenici samoinicijativno kod kuće posjećuju web stranice s digitalnim materijalima.</li> <li>• Učenici su zadovoljniji na nastavi matematike jer češće rade na računalima.</li> </ul>		
<b>Aktivnosti</b>		
<p>Za 1. cilj predviđa se da učenici u informatičkoj učionici samostalno uče otkrivanjem dolje navedene nastavne teme (po dva nastavna sata za svaku temu) kroz tri ciklusa:</p>		
1. ciklus	<b>Nast. tema</b>	<b>Translacija grafa kvadratne funkcije <math>f(x)=ax^2</math></b>
	<b>Digitalni materijal</b>	<a href="http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/kvadratna.htm">http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/kvadratna.htm</a>
	<b>Prikupljanje podataka</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• upitnik 2 (skala procjene, pitanja otvorenog tipa)</li> <li>• radovi učenika – radni list i kratka pisana provjera</li> <li>• fotografije nastave</li> <li>• istraživački dnevnik nastavnice</li> <li>• bilješke kritičkih prijatelja, e-mail poruke</li> </ul>
2. ciklus	<b>Nast. tema</b>	<b>Nultočke polinoma drugog stupnja i njegov graf</b>
	<b>Digitalni materijal</b>	izraditi novi digitalni materijal uz pomoć kritičkog prijatelja kolege Šime Šuljića
	<b>Prikupljanje podataka</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• video snimka i fotografije nastave</li> <li>• bilješke na temelju sustavnog promatranja (video snimka)</li> <li>• radovi učenika - pisana provjera znanja</li> <li>• grupni intervju</li> <li>• istraživački dnevnik nastavnice</li> <li>• bilješke kritičkih prijatelja, e-mail poruke</li> </ul>
3. ciklus	<b>Nast. tema</b>	<b>Definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta</b>
	<b>Digitalni materijal</b>	uz dozvolu autora A. Meiera prevesti i prilagoditi materijal na <a href="http://www.realmath.de/Neues/10zwo/trigo/sinuseinf.html">http://www.realmath.de/Neues/10zwo/trigo/sinuseinf.html</a>
	<b>Prikupljanje podataka</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• video snimka i fotografije nastave</li> <li>• bilješke na temelju sustavnog promatranja (video snimka)</li> <li>• upitnik 3 (Likertova skala procjene)</li> <li>• istraživački dnevnik nastavnice</li> <li>• bilješke kritičkih prijatelja, e-mail poruke</li> </ul>
<b>Vrijeme:</b> tijekom studenog i prosinca 2010.		
<p>Za 2. cilj predviđa se dodatna aktivnost koju nastavnica provodi samostalno i kontinuirano: proučavanje literature vezano uz kreiranje interaktivnih digitalnih obrazovnih materijala koji odgovaraju specifičnostima nastave matematike (Bjelanović Dijanić, 2009, Hohenwarter, Preiner, 2007).</p>		

# Proces ostvarivanja akcijskog istraživanja

## 1. ciklus: Translacija grafa kvadratne funkcije

Nastavni materijal koji smo koristili nalazi se na *Interaktivnoj matematici* udruge Normala<sup>3</sup> i već su ga koristile prethodne dvije generacije učenika. Autor materijala je Šime Šuljić. Učenici su sami formirali parove prema tome s kime vole učiti. Primjećujem da svaki par čine učenici podjednake sposobnosti i predznanja te da napreduju tempom koji odgovara njihovim sposobnostima. Rijetko zovu za pomoć, upute su im jasne. Međutim, na 3. vježbi većina učenika je imala poteškoća: *"Pročitali uputu, ali zovu jer ne znaju što treba raditi (bolji učenici). Neki su shvatili kako odabrati točku tjemena, ali ne razumiju što s drugim točkama."* (istraživački dnevnik, 15.11.2010.) Na satu je bio prisutan ravnatelj i kritički prijatelj Željko Kralj koji je pažljivo pratio što se događa. Nakon sata rekao je da se njemu ovakav način rada čini jako zahtjevan za nastavnika jer treba cijelo vrijeme hodati oko učenika koji ne napreduju istom brzinom pa u istom trenutku nastavnik treba vladati svim lekcijama kroz koje oni prolaze. Također je primijetio da nekim učenicima jako dobro ide dok uočava da neki drugi uopće ne razumiju što trebaju raditi (istraživački dnevnik, 15.11.2010.).

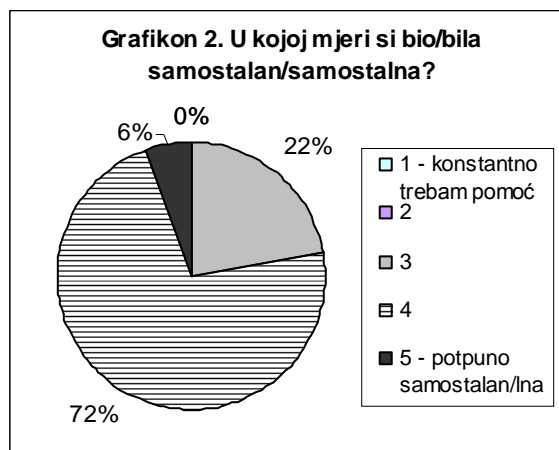
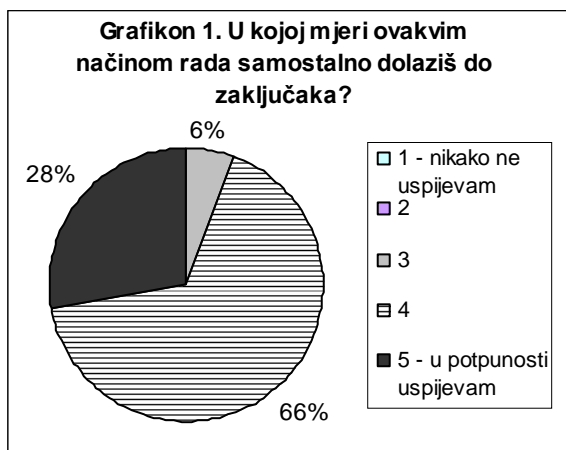


Slike 1. i 2. Računalo u nastavi – frontalno ili samostalno (u paru)

Slika 1. prikazuje kako smo računalo i projektor koristili u frontalnoj nastavi, dok je slika 2. snimljena za vrijeme dok su učenici učili u paru koristeći digitalne materijale. Branko Bognar dao je u e-mail poruci od 14.12.2010. svoj osvrt na ove dvije fotografije: *"Na prvoj fotografiji je moguće vidjeti frontalnu nastavu u kojoj je dominantan učitelj, dok su na drugoj fotografiji aktivni učenici. Na licima učenika (druga fotografija) moguće je uočiti interes i koncentriranost na aktivnosti kojima se bave."*

Upitnikom 2. smo utvrdili u kojoj mjeri su učenici bili samostalni u učenju te u dolaženju do zaključaka i jesu li posjećivali te web stranice kod kuće:

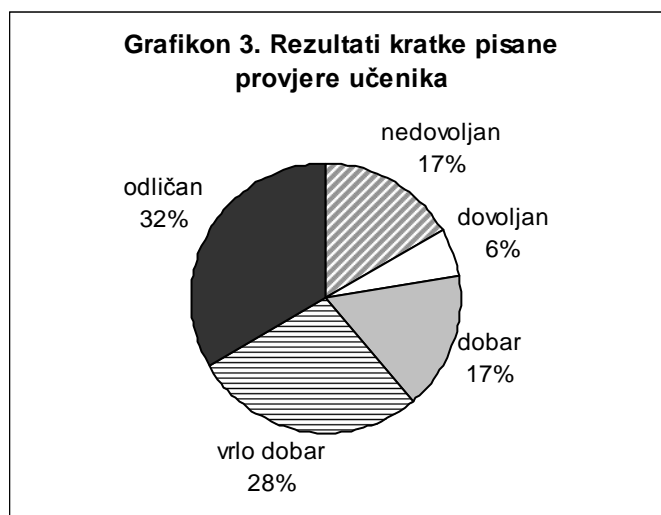
<sup>3</sup> [http://www.normala.hr/interaktivna\\_matematika/kvadratna.htm](http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/kvadratna.htm)



Učenici znaju da im je ovaj digitalni materijal putem interneta dostupan i kod kuće, ali na satu im nisam govorila kako bi bilo dobro da još koji put svrate na te stranice. Ipak, 11 od 18 učenika posjetilo je web stranice od kuće.

Što se radnog lista tiče, zadatke koji su zahtijevali kraće odgovore točno su riješili svi učenici, a zadatke u kojima je trebalo riječima opisati utjecaj parametara na graf riješila je oko polovica učenika. Većina učenika imala je problema sa zadatkom 19. (odrediti jednadžbu kvadratne funkcije sa skice) te sa zadatkom 20. (crtanje grafa kvadratne funkcije) pa smo ova rješenja analizirali i riješili jedan primjer na ploči. U razgovoru s učenicima nekolicina je uočila da je problem u tome što su učili uz pomoć računala, a ispituje ih se na papiru (istraživački dnevnik, 23.11.2010.)

Analiza kratke pisane provjere koja je sadržavala dva zadatka crtanja grafa (kao u zad. 20) te tri zadatka očitavanja jednadžbe funkcije sa slike (kao u zad 19.) pokazala je jako dobre rezultate i napredak kod većine učenika:

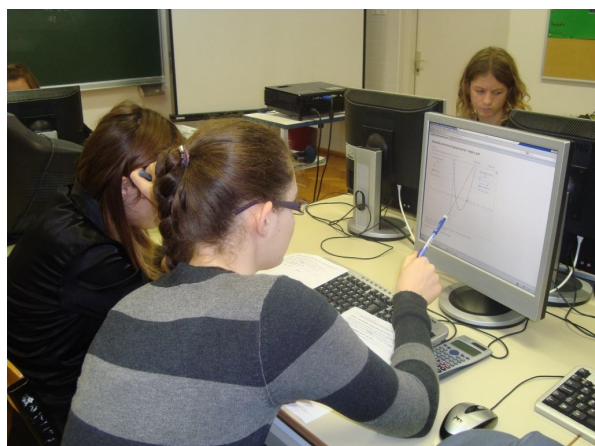


Nakon refleksije prvog ciklusa, rezultate sam dostavila kritičkim prijateljima. Željko Kralj bio je u kontaktu sa mnom i razredom vrlo često, pregledao je učeničke radove i nije

imao primjedbi osim da bi neki učenici trebali biti uredniji kod crtanja grafova. Branko Bognar je predložio da pokušam sakupiti više kvalitativnih podataka.

## 2. ciklus: Nultočke polinoma drugog stupnja i njegov graf

Digitalni nastavni materijal za ovu temu pokušala sam napraviti sama (dva dinamična apleta i radni list). Učenici su na prvom satu u informatičkoj učionici (23.11.2010.) imali poteškoća sa shvaćanjem uputa pa je Šime Šuljić pomogao da se materijal doradi i prepravi tako da smo na idućem satu (25.11.2010.) krenuli po novom materijalu<sup>4</sup> te sam taj sat snimala kamerom. Nakon pregledavanja video snimke u istraživački dnevnik 30.11. sam zapisala: *"Profesorica šeće razredom, nastoji biti nenametljiva, gleda iza leđa učenika što oni rade te se upliće ako primijeti da nešto nisu dobro shvatili. Učenici rade, rijetko ju zovu, eventualno ako je u blizini, češće se obrate susjedu za pomoć."* Na tom satu zabilježeno je nekoliko fotografija:

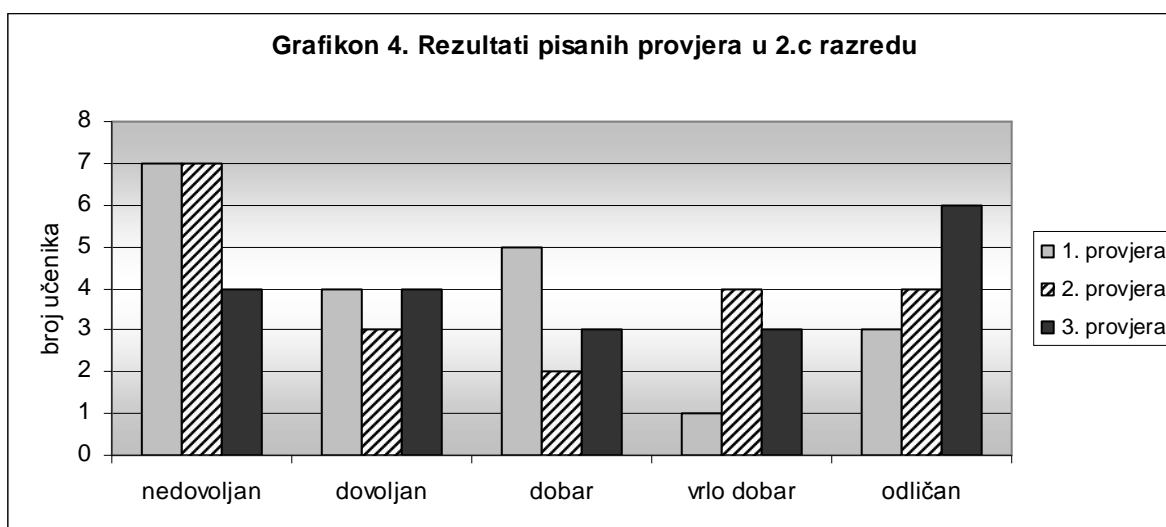


Slike 3. i 4. Rad učenika na digitalnom materijalu i radnom listu

Šime Šuljić dao je svoje viđenje fotografija: *"Prva fotografija prikazuje radni materijal - aplet i rad učenika u paru. Očito je da raspravljaju svoje ideje. Učenica u redu nasuprot udubljena u problem. Na drugoj slici učenici ispunjavaju radni list. Pritom se oslanjaju na interaktivni sadržaj na računalu. Izgleda da povremeno provjeravaju rezultat na kalkulatoru. Fotografija mi govori da je radna temperatura visoka."*

Nakon ovog sata preostale nastavne teme obrađivali smo u razredu, a dio i s GeoGebrom frontalno na LCD projektoru te se trebalo pripremiti za pisanu provjeru znanja iz ove cjeline. Rezultate 3. pisane provjere možemo usporediti s rezultatima prethodnih dviju:

<sup>4</sup> <http://free-bj.t-com.hr/zbjelanovic/apleti/nultočke.html>



U obje prethodne pisane provjere prolaznost je bila 65%, dok je u 3. pisanoj provjeri 80%. Osim opadanja broja negativnih ocjena primjećuje se rast broja odličnih ocjena. Željko Kralj je pregledao učeničke radove te razgovarao s učenicima. Vrlo je zadovoljan postignutim rezultatima (ističe prolaznost od 80%), ali je zamjerku uputio onim učenicima koji pišu i crtaju nezašiljenom olovkom te koordinatni sustav crtaju bez ravnala.

Kako bi upotpunili refleksiju 2. ciklusa i dobili viđenja učenika o ostvarivanju kritičko-refleksivne prakse, organizirali smo grupni polustrukturirani intervju.

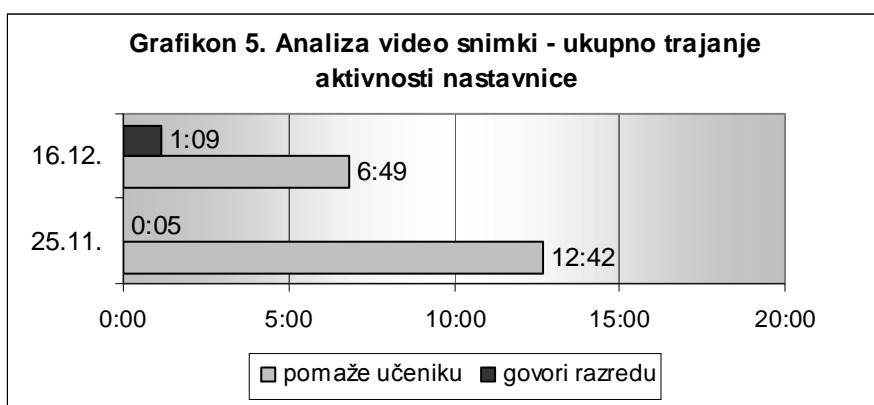
Tablica 2. Grupni intervju (izdvojeno iz transkripta i kategorizirano)

	Odgovori učenika u grupnom polustrukturiranom intervjuu
<b>Prednosti</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• zanimljivije</li> <li>• lakše se usvaja gradivo jer ima puno primjera</li> <li>• samostalno dolaženje do zaključka je poticajno</li> <li>• ostaje dulje u sjećanju</li> <li>• možemo si vizualizirati to što radimo, vizualno više zapamtimo</li> <li>• možemo ići svojim tempom</li> <li>• možemo više puta proći istu stvar ako nam nije jasno da si razjasnimo</li> <li>• materijal na webu, možemo pogledati kod kuće</li> </ul>
<b>Nedostatci</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nije nam objašnjeno kako vi objasnite</li> <li>• problem s razumijevanjem uputa</li> <li>• kompjuter nacrtava automatski, a mi to trebamo postepeno</li> <li>• trebalo bi najvažnije zapisati u bilježnicu</li> </ul>
<b>Prijedlozi za poboljšanje</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• bolje je u paru nego kad smo sami, možemo diskutirati s partnerom</li> <li>• da imamo radni list na koji pišemo</li> <li>• ovo je bolje za vježbu nego za učenje, da na kompjuteru vježbaš tek kad shvatiš</li> <li>• kad bi klizači bili precizniji, da ne preskaču, da možemo provjeriti zadaću,</li> <li>• povratna informacija, ako smo dali krivi odgovor da kompjuter izbaci točan</li> </ul>

### 3. ciklus: Definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta

Za ovu temu Šime Šuljić i ja zajednički smo prilagodili materijal na njemačkom Andreasa Meiera<sup>5</sup>. Pisala sam mu da nam dozvoli korištenje i prilagodbu materijala na hrvatski, a pošto nije odgovorio odlučili smo postupiti prema Creative Common licenci (dijeli pod istim uvjetima). Prilagodili smo materijal<sup>6</sup> te naveli tko je izvorni autor. Meier je pripremio dosta zanimljivih interaktivnih vježbi, a pošto bi njihova prilagodba zahtijevala puno vremena, odlučili smo da učenici vježbaju na originalnim njemačkim vježbama.

Taj sat održan je 16.12.2010. u informatičkoj učionici. Učenici su mogli birati žele li raditi u paru ili samostalno. Opet smo snimali video kamerom te fotoaparatom. U istraživačkom dnevniku 16.12. je zabilježeno: *"Vidi se poboljšanje u snalaženju učenika, vježbe su motivirajuće, a sakupljanje bodova ih posebno veseli. Učenici s lakoćom rješavaju radni list. U nekim Meierovim apletima je bilo bugova – upozorila učenike kako da to izbjegnu. U 45 minuta većina učenika odradila posao, dalje nastavljamo po udžbeniku."* Nakon pregledavanja video snimke u istraživački dnevnik 18.12. sam zapisala: *"Profesorica ovog puta više govori cijelom razredu pa ju zbog toga manje zovu na pojedinačne intervencije. Atmosfera je ležernija, jedan drugome puno više pomažu, vesele se sakupljanju bodova."* Pažljivo sam pregledala i analizirala prvih 20 minuta na obje snimke (do tada se učenici još nisu počeli javljati da su gotovi) te izdvojila dvije kategorije: nastavnica pomaže učenicima (individualno ili paru) te nastavnica glasno govori razredu. Bilježila sam koliko puta se pojavila koja kategorija te koliko je trajala.



Na prvoj snimci (25.11.) može se prebrojati da je nastavnica pomagala učenicima (pritom se misli na tihi razgovor između nastavnice i dva učenika u paru) ukupno 28 puta u ukupnom trajanju od 12:42 minute (63,5%) što bi značilo da je u prosjeku svaki par samo 6,35% vremena imao pomoć nastavnice, dok ostalo otpada na samostalnu aktivnost. Na

<sup>5</sup> <http://www.realmath.de/Neues/10zwo/trigo/sinuseinf.html>

<sup>6</sup> <http://free-bj.t-com.hr/zbjelanovic/apleti/sinus.html>

drugoj snimci (16.12.) nastavnica je 9 puta u trajanju od 1:09 minuta cijelom razredu glasno davala upute, a individualno je pomagala 17 puta u trajanju od 6:49 minuta (34,08%) što je u prosjeku 3,41% po učeniku (jer smo imali 10 parova).

Na kraju sam sva pitanja i dileme na koje smo nailazili tijekom rada objedinila te sastavila Likertovu skalu procjene koja će nam poslužiti kao kritička refleksija za analizu podataka i provjeru u kojoj mjeri smo ispunili naše polazne odgojne vrijednosti.

Tablica 3. Likertova skala procjene (izvadak iz upitnika 3.)

	Tvrđnja	Uopće se ne slažem.	Ne slažem se.	Niti se slažem, niti se ne slažem.	Slažem se.	U potpunosti se slažem.
1.	Samostalno učenje uz pomoć računala omogućava mi lakše usvajanje gradiva.			20%	65%	15%
2.	Samostalno učenje uz pomoć računala mi je zanimljivije nego nastava u našem razredu.			25%	45%	30%
3.	Računalo mi omogućava da lakše samostalno dođem do zaključaka.			10%	70%	20%
4.	Računalo mi pomaže u vizualizaciji matematičkih pojmova.			15%	40%	45%
6.	Računalo me tjera da razmišljam više nego kad je nastava u našoj učionici.			10%	70%	20%
10.	Napredovanje vlastitim tempom je prednost samostalnog učenja uz pomoć računala.			25%	50%	25%
11.	Zbog toga što računalo lako i automatski crta grafove, kasnije imam poteškoća kad moram sam/a nacrtati graf olovkom na papiru.	5%	20%	40%	30%	5%
12.	Digitalni materijali dostupni putem weba omogućuju mi da si kod kuće ponovim i razjasnim što na satu nisam dobro shvatio/la.			10%	30%	60%
15.	Povratna informacija o točnosti naših odgovora olakšava mi praćenje sadržaja.			10%	75%	15%
17.	Radni list na koji olovkom upisujemo odgovore pomaže mi da bolje pratim sadržaje na digitalnom materijalu.			15%	60%	25%

## Interpretacija akcijskog istraživanja

Kao polazište za ovo istraživanje uzeli smo teoriju konstruktivizma koja naglašava da znanje nastaje aktivnošću učenika te praksu koja pokazuje da to nije lako izvedivo u nastavi organiziranoj na tradicionalni način. U praksi smo uočili da jedan dio učenika ima ozbiljnih problema pri usvajanju matematičkih sadržaja pa se pitamo kako postići aktivnost svih učenika na satu te kako poticati samostalnost u učenju. To su bile polazne vrijednosti od kojih smo krenuli. I kao što Kurnik (2008) predlaže, htjeli smo postići da učenici vlastitim snagama

dolaze do vlastitih spoznaja i na taj način stječu nova znanja te smo se odlučili za učenje uz pomoć računala. Međutim, ne misli se na korištenje računala u frontalnoj nastavi uz LCD projektor ili pametnu ploču (Slika 1.) nego da svatko radi za svojim računalom (Slika 2.). Ako tomu dodamo Pólyin heuristički pristup učenju (Pólya, 2004) tada je samostalno učenje otkrivanjem jedno od mogućih rješenja početnog problema.

S obzirom da je u istraživanju prikupljeno podosta kvalitativnog i kvantitativnog materijala, njihovo usklađivanje će poslužiti kao postupak triangulacije čime ćemo nastojati izbjeći jednostranost kvalitativne analize podataka te doći do vrijednih zaključaka.

Iz slika 2., 3. i 4. vidljivo je da smo postigli **aktivnost svih učenika** na satu. To potvrđuju i rezultati pisanih provjera koji su znatno bolje nego inače. U kratkoj provjeri (grafikon 3) trećina učenika ocijenjena je odličnim, dok je u trećoj pisanoj provjeri (grafikon 4) 80% učenika ocijenjeno pozitivnom ocijenom. Učenici kao prednost ističu napredovanje vlastitim tempom (75% učenika, tablica 3, tvrdnja 10) te činjenicu da više puta mogu ponoviti isti postupak dok si ne razjasne problem. 90% učenika (tablica 3, tvrdnja 6) smatra da ih računalo tjera na razmišljanje više nego tradicionalno organizirana nastava. Za pretpostaviti je da sve to utječe na veću aktivnost učenika na satu. Nadalje, primjećuje se da učenici i kod kuće samoinicijativno posjećuju web stranice s nastavnim materijalima (upitnik 2, 61% učenika) te da im dostupnost putem weba omogućuje da si kod kuće razjasne što nisu shvatili u školi (90% učenika, tablica 3, tvrdnja 12).

Analiza video snimki (grafikon 5) ukazuje na **povećanje samostalnosti** pri čemu razlikujemo samostalnost u cjelokupnom procesu učenja i samostalnost u dolaženju do zaključaka. U prvom ciklusu (grafikoni 1. i 2.) može se primijetiti da su učenici samostalniji u dolaženju do zaključaka (28%) nego u učenju uz pomoć računala ukupno gledajući (6%). To objašnjavamo time što su učenici isprva imali poteškoća s praćenjem uputa te su češće pozivali nastavnika u pomoć ili se konzultirali s drugim učenicima da bi nakon shvaćanja upute lako došli do zaključka uz pomoć računala. Samostalno dolaženje do zaključaka učenici smatraju poticajnim (tablica 2), a to je ono čemu težimo.

Kvalitativni podaci (fotografije, video snimke, izjave kritičkih prijatelja, grupni intervju) ukazuju na vrijednost računalom potpomognutog učenja. 75% učenika smatra da im je ovakav način učenja zanimljiviji od tradicionalne nastave (tablica 3, tvrdnja 2). Omogućava im lakše usvajanje gradiva (80% učenika, tablica 3, tvrdnja 1) jer računalo u kratkom vremenu može generirati više različitih primjera, a pomaže i u vizualizaciji matematičkih objekata (85% učenika, tablica 3, tvrdnja 4). Računalo daje brzu povratnu informaciju što učenicima olakšava praćenje sadržaja digitalnih materijala (90% učenika, tablica 3, tvrdnja 15), a vježbe sa sakupljanjem bodova ih posebno motiviraju.

Međutim, uočeni su i nedostaci ovakvog načina rada. Učenici uče uz pomoć računala, a provjerava ih se pisanim provjerama znanja na papiru. Jedan od načina kako ublažiti ovu kontradikciju jest korištenje radnog lista kojeg će učenici ispunjavati paralelno s proučavanjem sadržaja digitalnog materijala. 85% učenika (tablica 3, tvrdnja 17) se izjasnilo da im radni list pomaže da lakše prate sadržaj. Još bolje rješenje bilo bi osmisliti provjeru znanja također na računalu. Nadalje, primjećuje se da neki učenici imaju poteškoća s crtanjem grafova na papiru jer računalo automatski nacrtava graf (tablica 3, tvrdnja 11, komentari Željka Kralja). Uočen je i problem razumijevanja uputa, a uglavnom se pojavljuje kod onih učenika koji i inače imaju poteškoća s razumijevanjem zadatka. Rješenje ovog problema može se potražiti u heurističkom pristupu učenju i umijeću otkrivanja (Pólya, 2004) te bi se trebalo rješavati kontinuirano bez obzira na način organizacije nastave.

Promjene koje sam ovim akcijskim istraživanjem uspjela uvesti u svom nastavnom procesu rezultat su raznih činitelja: spremnosti i mene i učenika za djelovanje na temelju postavljenih vrijednosti, stalna suradnja i uvažavanje svačijeg mišljenja, odgovornost učenika za vlastiti napredak, pomoć i savjeti kritičkih prijatelja te samokritičko uvažavanje njihovih primjedbi. Za razliku od prethodnih generacija učenika, ovi učenici su puno ozbiljnije pristupili učenju uz pomoć računala čemu je uvelike doprinio proces akcijskog istraživanja, a posebice refleksija nakon svakog ciklusa.

Kritički prijatelj Željko Kralj nakon analize prikupljenih podataka izveo je opći zaključak: *"Učenjem uz pomoć računala učenik iz pasivnog promatrača prelazi u aktivnog sudionika, a time i njegova motivacija za učenje postaje veća."* Međutim, to ne znači da je naše akcijsko istraživanje završeno, sada se otvaraju nove perspektive, uočavaju se problemi i eventualna rješenja, mogućnosti za poboljšanje, a pitanja kojima ćemo se ubuduće baviti su:

- ugradnja Pólyinog heurističkog učenja u dinamičko okruženje za učenje,
- provjera znanja korištenjem računala i interaktivnih digitalnih materijala,
- izrada novih i poboljšanje postojećih digitalnih materijala (ovo je 2. cilj koji je ostvaren u okviru akcijskog istraživanja, a za daljnje provođenje ovakvog načina poučavanja potrebno je osigurati nove kvalitetne digitalne nastavne materijale).

## **Zaključak**

Učenje matematike otkrivanjem uz pomoć računala i programa dinamičke geometrije Geogebra te uz metodički osmišljene i didaktički oblikovane interaktivne digitalne obrazovne materijale osigurava aktivnost svih učenika u razredu, povećava motivaciju za učenje matematike, potiče samostalno dolaženje do zaključaka, ali i suradnju među učenicima.

Pritom je važno da učenik sam ili u paru uči na svom računalu, da sam pokuša otkriti nove spoznaje. Tako stečeno znanje dulje će ostati u pamćenju, a učenik će naučiti misliti, svaki novi problem puno lakše riješiti te ovladati umijećem otkrivanja.

Međutim, je li ovo izvedivo u nastavnoj praksi, uvelike ovisi o školskim uvjetima. Pokazalo se kako su učenici spremni na suradnju pri uvođenju promjena u nastavi, ali ako nastavnik matematike nije u mogućnosti koristiti informatičku učionicu za potrebe svoje nastave, tada neće moći provesti ideje opisane u ovom radu. Ipak, nadam se da će čitanje rada potaknuti i druge nastavnike da pokušaju uvesti promjene u svojoj pedagoškoj praksi u skladu sa školskim uvjetima u kojima rade.

## Reference:

- [1] Bjelanović Dijanić, Ž. (2009), *Audiovizualna multimedijaska komunikacija pri učenju matematike putem interaktivne web stranice*. Matematika i škola, god X, br 49, str. 157-166.
- [2] Bjelanović Dijanić, Ž. (2010), *Učenje istraživanjem u GeoGebri prema modelu Georga Pólya*. Matematika i škola, god XII, br 57, str. 64-70.
- [3] Bognar, B. (2006a), *Akcijska istraživanja u školi*. Odgojne znanosti, Vol. 8, br. 1(11), p. 209-227.
- [4] Bognar, B. (2008), *Mogućnost ostvarivanja uloge učitelja – akcijskog istraživača posredstvom elektroničkog učenja* (doktorska disertacija, Filozofski fakultet u Zagrebu).
- [5] Bognar, L., Matijević, M. (2002), *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.
- [6] Cohen, L., Manion, L. Morrison, K. (2007), *Metode istraživanja u obrazovanju*. Jastrebarsko: Slap.
- [7] Glasnović Gracin D. (2008), *Računalo u nastavi matematike – Teorijska podloga i metodičke smjernice*. Matematika i škola, god X, br 46, str. 10-15.
- [8] Hohenwarter, M., Preiner, J. (2007), *Creating Mathlets with Open Source Tools*. The Journal of Online Mathematics and Its Applications, Vol. 7. [www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter2/index.html](http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter2/index.html) (dostupno 10.1.2011)
- [9] Karadag, Z., McDougall, D. (2009), *Dynamic worksheets: visual learning with guidance of Polya*. MSOR Connections, vol 9, no 2. [http://mathstore.ac.uk/headocs/9213\\_karadag\\_z\\_and\\_mcdougall\\_d\\_polya.pdf](http://mathstore.ac.uk/headocs/9213_karadag_z_and_mcdougall_d_polya.pdf) (dostupno 10.1.2011)
- [10] Kurnik, Z. (2008), *Istraživačka nastava*. Matematika i škola, god X, br 47, str. 52-59.
- [11] Pólya, G. (2004), *How to Solve It? A New Aspect of Mathematical Method*. New Jersey: Princeton University Press.

Željka Bjelanović Dijanić

Mathematics and IT teacher

High School Čazma, Livadarska 30, Čazma

Normala – Organization for Improving Teaching Mathematics, Zagreb

e-mail: [zeljka.bjelanovic@bj.t-com.hr](mailto:zeljka.bjelanovic@bj.t-com.hr)

### **Discovery learning in mathematics by using dynamic geometry software GeoGebra – action research**

It is necessary to get involved actively in the process of acquiring knowledge to learn mathematical contents successfully. The theory of constructivism emphasizes student's individual activity in which he/she creates his/her own knowledge through his/her own experience, while the teacher prepares and shapes the environment for learning and encourages and guides students in their independent learning. The aim of this approach is for students to learn how to learn, and Polya's problem-solving model provides an answer how to perform in practice - in 4 steps: understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan and reflection.

In teaching practice, this can be achieved by using discovery learning or inquiry based learning. In mathematics, dynamic geometry software can be of great help because of its possibilities to display the dynamism and interactivity of mathematical objects so it provides a dynamic virtual environment for research. Among such programs GeoGebra is distinguished because it's free and open source, translated into Croatian, intuitive and easy-to-use tool, combing elements of geometry, algebra, analysis and statistics. Moreover, the community of its users on the Internet is large and very active so there are more and more completed examples that can be used in everyday teaching.

There were various problems the author encountered in her teaching practice when trying to implement the ideas described above, so she opted for action research which seeks to respond to the problem: how to help students to discovery learn new mathematical terms, concepts and ideas independently by using computer and GeoGebra. This article describes the research and presents a report on the achieved action research with second grade students in High school Čazma in Čazma.

Keywords:

action research, GeoGebra, Pólya's problem-solving model, constructivism, discovery learning, dynamic virtual learning environment